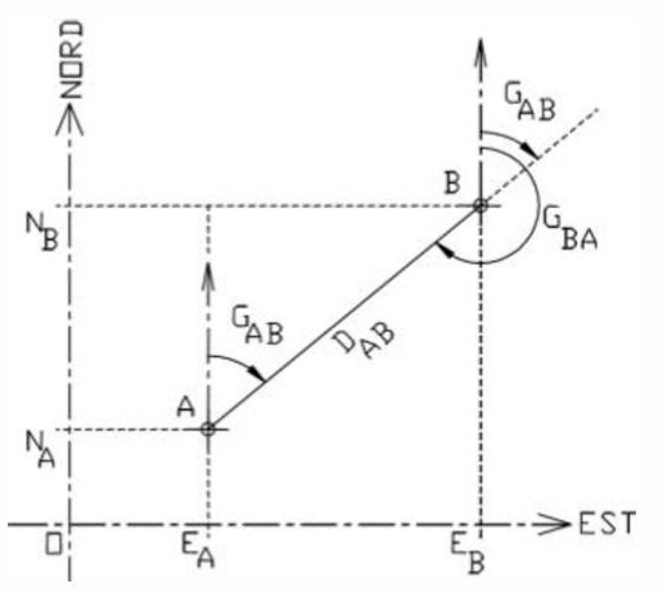
Chapitre 5 Détermination des surfaces

Introduction

- Les processus de calcul des superficies, à partir de cartes ou de la nature, sont considérés comme des opérations de base dans la topographie. La précision du calcul de la surface dépend de la précision de la mesure. Bien que la méthode la plus précise de calculer les surfaces soit la mesure directement des longueurs et des angles dans la nature pour la forme de sa surface trouvée. Sauf que la mesure provient de la carte c'est la plus courante dans les calculs des surfaces. Cela est dû àlafacilité de mesure à partir de la carte, malgré les erreurs possibles lors de son dessin. Le calcul de la surface varie en fonction des données et de la forme des surfaces que nous voulons calculer, elle peut prendre la forme de géométrique régulière ou irrégulière. Dans ce chapitre, nous allons montrer les méthodes de calcul

- pour détermine la surface d'un polygone fermé il faut connaitre les coordonnées (cartésiennes, polaires) ou les distances et les gisements de ce polygone. Donc nous allons commencer pour calculer les angles « Gisement ».
- Définition : Le Gisement d'une direction AB est l'angle horizontal mesuré positivement dans le sens horaire entre l'axe des ordonnées du système de projection utilisé et cette direction AB. On le note G AB .
- Mathématiquement, c'est l'angle positif en sens horaire entre l'axe des ordonnées du repère et la droite (AB). Un gisement est toujours compris entre 0 et 400 grades.
- GAB est l'angle entre le Nord (ordonnées) et la direction AB.
- GBAest l'angle entre le Nord (ordonnées) et la direction BA.

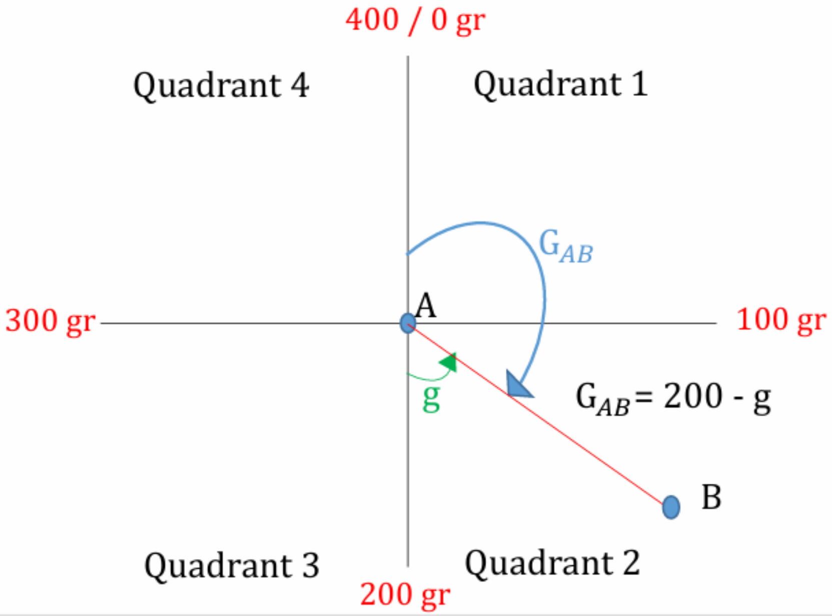


- La relation qui lie GAB et GBA est : GBA = GAB +200 1.
- Calcul d'un gisement à partir de coordonnées cartésiennes Considérons les coordonnées de deux points A(XA, YA) et B(XB, YB) (figures suivantes).
- La distance DAB se calcul comme suit: $D_{AB} = \sqrt{(\Delta X^2 + \Delta Y^2)} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$
- En fait, la calculatrice donne la valeur de l'angle auxiliaire g (figures). Pour obtenir G$\boldsymbol{AB}$, il faut donc tenir compte de la position du point B par rapport au point A ; on parle de quadrants:

* **Quadrant 2 :** B est à l'est et au sud de A

$(\Delta X > 0)$ et $(\Delta Y < 0)$

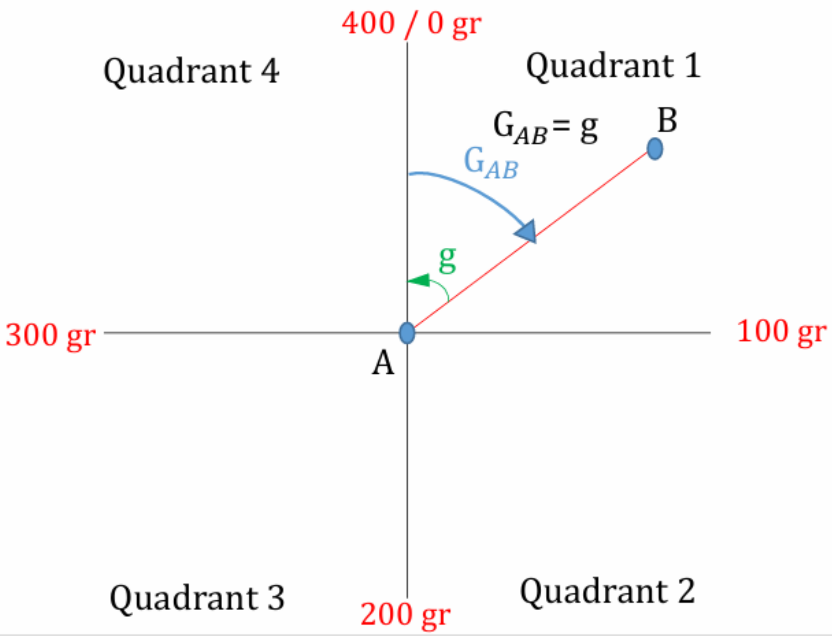
$\boxed{G_{AB} = 200 - g}$



* **Quadrant 1 :** B est à l'est et au nord de A

$(\Delta X > 0)$ et $(\Delta Y > 0)$

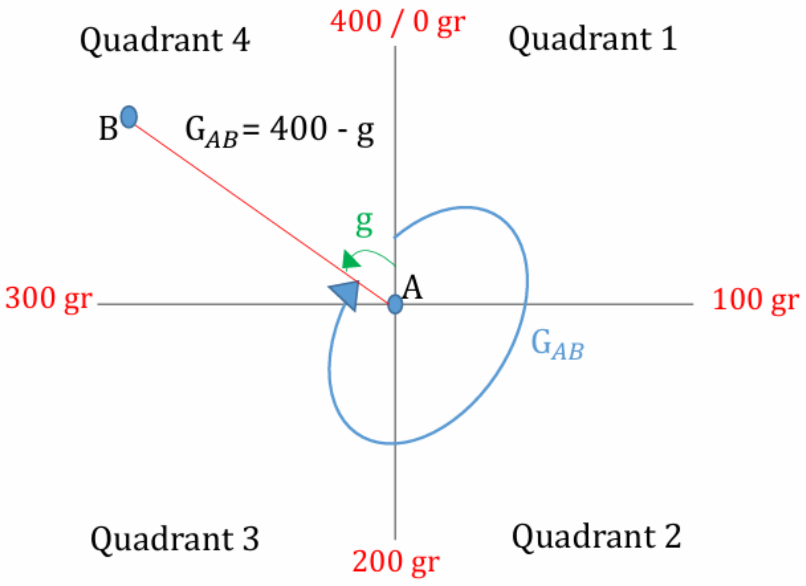
$\boxed{G_{AB} = g}$



*** Quadrant 4 :** B est à l'Ouest et au Nord de A

$(\Delta X < 0)$ et $(\Delta Y > 0)$

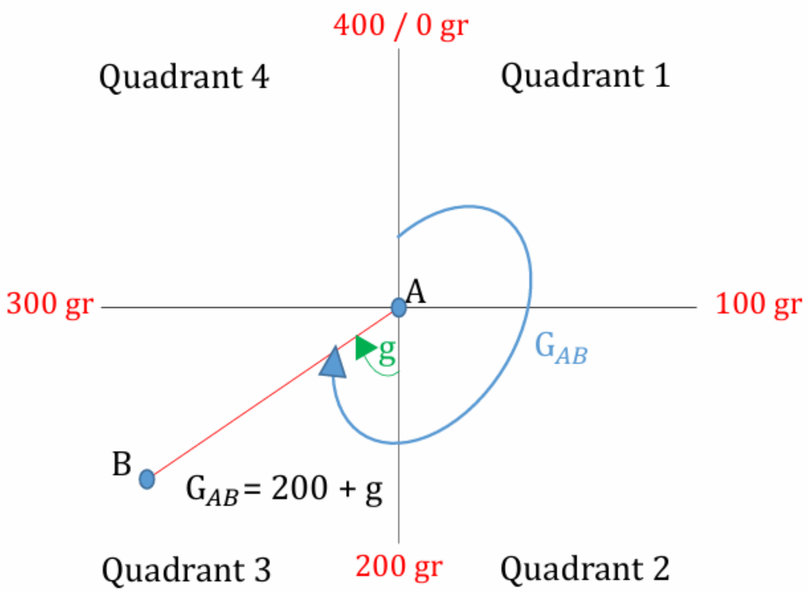
$\boxed{G_{AB} = 400 - g}$



*** Quadrant 3 :** B est à l'Ouest et au Sud de A

$(\Delta X < 0)$ et $(\Delta Y < 0)$

$\boxed{G_{AB} = 200 + g}$



- La relation suivante permet de calculer l'angle auxiliaire g

$$tg\ \mathbf{g} = \left|\frac{\Delta X}{\Delta Y}\right| = \left|\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right|$$

- qui est un angle inférieur à 100 grades que forme la direction AB avec l’axe de Y

Calcul de coordonnées cartésiennes

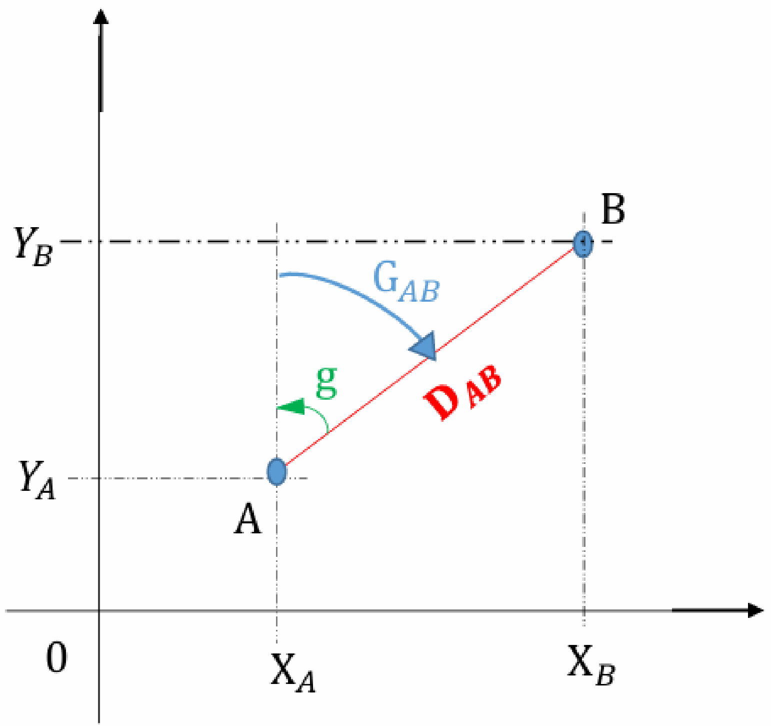
- Calcul de coordonnées cartésiennes à partir d'un gisement

Connaissant le point de station A (XA, YA), et cherchant les coordonnées d'un point B visible depuis A. On dit que le point B est rayonné depuis A si l'on peut mesurer la distance horizontale DAB et le gisement GAB.

Quel que soit le quadrant, on peut alors calculer les coordonnées du point B par les formules suivantes :

$$X_B = X_A + D_{AB} \cdot \sin G_{AB}$$

$$Y_B = Y_A + D_{AB} \cdot \cos G_{AB}$$

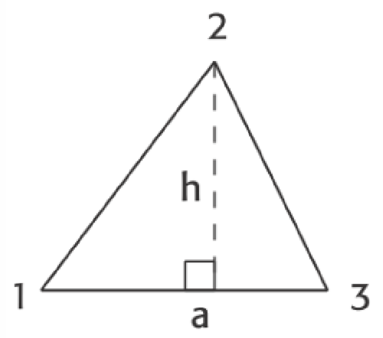


Calcul de coordonnées

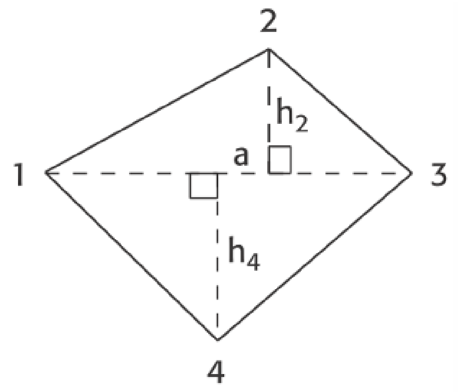
Décomposition d'un polygone en triangles et en trapèzes

- Décomposition d'un polygone en triangles et en trapèzes

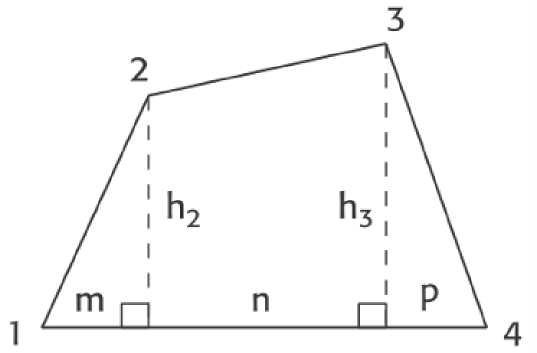
Le polygone reporté à l'échelle est décomposé graphiquement en triangles et trapèzes les plus proches possible du triangle équilatéral et du rectangle. À partir des mesures graphiques des bases et des hauteurs (figures suivantes), les superficies sont calculées par les formules élémentaires :



$$S = \frac{1}{2} a \,.\, h$$



$$S = \frac{1}{2} a \,.\, (h_2 + h_4)$$



$$S = \frac{1}{2} \left(m \,.\, h_2 + n.\,(h_2 + h_3) + p.\, h_3\right)$$

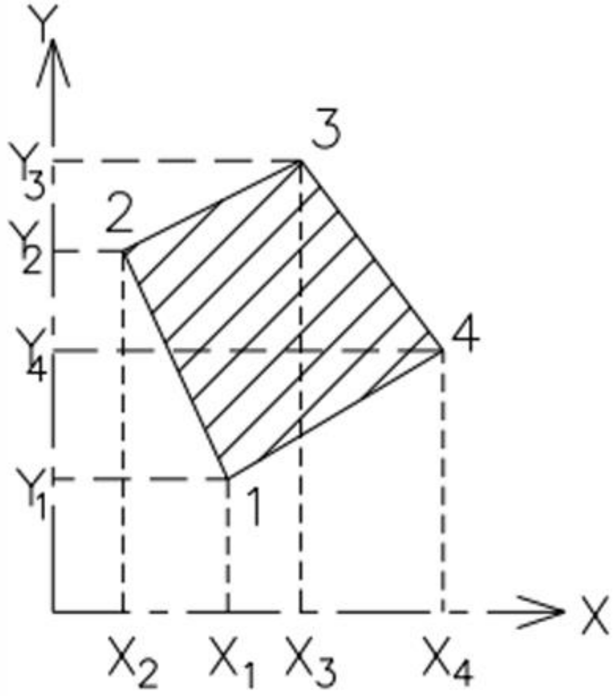
Les sommets sont connus en coordonnées cartésiennes X,Y

- Les sommets sont connus en coordonnées cartésiennes X,Y

Soit un polygone de n sommets dont chacun est connu par ses coordonnées rectangulaires (Xi ; Yi). La figure suivante. présente un exemple avec n =4. La surface de ce polygone s'exprime de deux manières équivalentes :

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} X_i\,(Y_{i-1} - Y_{i+1})$$

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} Y_i\,(X_{i-1} - X_{i+1})$$



Surface en cartésien

Les sommets sont connus en coordonnées polaires

- Les sommets sont connus en coordonnées polaires

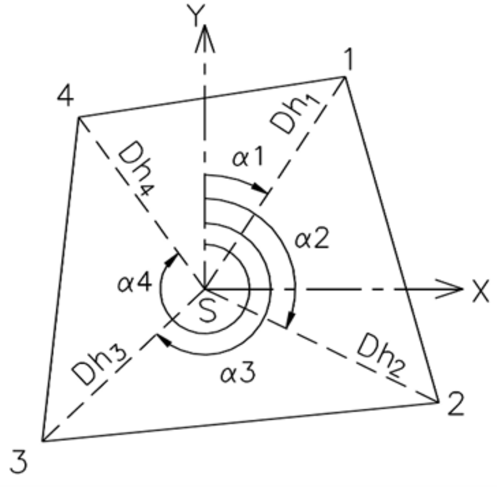
Un appareil du type théodolite stationné au point S permet d'effectuer les lectures des angles ai sur les sommets du polygone. Si on mesure ensuite (par exemple au ruban) la distance horizontale du point S à chacun des sommets, on connaît ces sommets en coordonnées polaires topographiques (Dh , a) dans le repère (S, X, Y), l'axe des ordonnées Y étant la position du zéro du cercle horizontal du théodolite Soit un polygone levé par rayonnement depuis un point S (figure), dont les sommets sont numérotés à partir de l'unité en respectant la suite naturelle des nombres sans solution de continuité et parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

- Soit un polygone de n sommets dont chacun est connu par ses coordonnées rectangulaires (Xi ; Yi). La figure suivante. présente un exemple avec n = 4. La surface de ce polygone s'exprime de deux manières équivalentes :

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} Dh_i \,.\, Dh_{i+1}.\ \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

$$\alpha = (\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

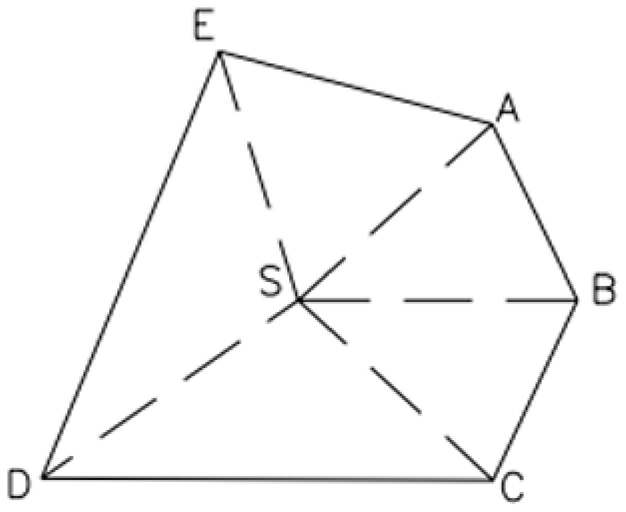
$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} Dh_i \,.\, Dh_{i+1}.\ \sin\alpha$$



Surface en polaire

Application

Calculez la surface du polygone (A-B-C-D-E) levé en coordonnées polaires topographiques à partir de la station S (figure suivante). Ces coordonnées sont données dans le tableau suivant :



Points	*Dh* (m)	Angles (gon)
A	48,12	53,12
B	51,33	100,03
C	48,71	147,41
D	57,48	261,53
E	47,93	380,37

- Solution

Le tableau suivant donne le détail des calculs. La surface totale est **5409,1575** $m2$

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} Dh_i \, . \, Dh_{i+1} . \, \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

Triangles	Angle ($\alpha_{i+1} - \alpha_i$)	Surface (m^2)
ASB	46,91	829,8781
BSC	47,38	846,8655
CSD	114,12	1365,6326
DSE	118,84	1317,6265
ESA	72,75	1049,1548